ベーテ格子上のアンダーソンモデルにおける固有値・固有関数の分布について (繰りこみ群の数理科学での応用)

中野, 史彦

数理解析研究所講究録
第 1600 巻 2008 年 147-151

ベーテ格子上のアンダーソンモデルにおける固有値・固有関数の分布について
(A remark on distribution of eigenfunctions of the Anderson model on the Bethe lattice)

高知大学・理学部　中野史彦 (Fumihiko Nakano)
Department of Mathematics, Kochi University

概要

ベーテ格子上のアンダーソンモデルについて、その固有値・固有函数の分布を $\mathbf{R}^{d+1}$ 上のランダム測度を用いて記述し、そのスケーリング極限の振る舞いを調べる。Macroscopic limit については $\mathbf{Z}^d$ 上でのアンダーソンモデルと同様の結果が得られたが、natural scaling limit については部分的な結果のみ得られた。

Mathematics Subject Classification (2000): 82B44, 81Q10

次のシュレーディンガー作用素を考える。

$$(H\psi)(x) := \sum_{d(x,y)=1} \psi(y) + \lambda V(x)\psi(x), \quad \psi \in l^2(\mathbf{B}).$$

ここで、$\lambda \neq 0$ は coupling constant, $\mathbf{B}$ は coordination number $K+1(K \geq 2)$ を持つ Bethe lattice であり、$\{V(x)\}_{x\in B}$ は有界な密度 ρ を持つ実数値独立同分布確率変数である。$\sigma(H) = [-2\sqrt{K}, 2\sqrt{K}] + \mathrm{supp}\ \rho$, a.s. であること、及び任意の開区間 $I \subset [-2\sqrt{K}, 2\sqrt{K}]$ に対し $|\lambda|$ を小さくとれば $\sigma(H) \cap I = \sigma_{ac}(H) \cap I$ かつ $\sigma(H) \cap \{|E| \geq K+1\} = \sigma_{pp}(H) \cap \{|E| \geq K+1\}$ であってこの領域においてアンダーソン局在が起こることはよく知られている [1, 3]。一方、Aizenman-Warzel [2] は rooted tree $\mathbf{B}_K$ 上のアンダーソンモデル H_K について、その finite-volume approximation

$$H_L := H_K|_{\mathcal{T}_L}, \quad \mathcal{T}_L := \{x \in \mathbf{B}_K : d(0,x) \leq L\}$$

を考え、H_L の固有値 $\{E_j(L)\}_j$ のなす $\mathbf{R}$ 上の点過程

$$\mu_L(dx) := \sum_j \delta_{|\mathcal{T}_L|(E_j(L)-E_0)}(dx)$$

が a.e. $E_0 \in \mathbf{R}$ に対し、$L \to \infty$ のとき、$\mathbf{R}$ 上のポアソン点過程 ζ でその intensity が $n_C(E)dx$ であるものに分布の意味で収束することを示し

た。ここで、n_C は $\mathbf{B}_K$ に対応する canopy graph C 上のアンダーソンモデル H_C の density of states. 一般に $E \in \sigma_{ac}(H)$ のとき、μ_L は GOE などポアソン点過程とは異なるものへ収束すると予想されているので、この結果は $\mathbf{B}_K$ においては finite -volume approximation がある意味であまり「良く無い近似」であり、H_L は H_K ではなく、むしろ H_C を近似していることを示唆する[1]。

本研究の目的は H の固有値・固有函数の分布を調べることである。$\mathbf{Z}^d$ 上のアンダーソンモデルでは固有値・固有函数の分布について次のことがわかっている [4]。

(1) $\mathbf{R}^{d+1}$ 上のランダム測度[2]を $I \subset \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}^d$ に対しては

$$\xi_L(I \times B) := \frac{1}{L^d}\mathrm{Tr}\ (1_{LB}(x)P_I(H))$$

とおくことにより定義する。ここで、$P_I(H)$ は I に対応する H のスペクトル射影作用素。すると、a.s. において

$$\xi_L \xrightarrow{v} \nu \times dx.$$

ここで、$\xrightarrow{v}$ は vague convergence を意味する。ν は density of states measure である : $\nu(J) := \mathbf{E}[\langle 0|P_J(H)|0\rangle]$. この結果は I に対応する H の固有函数が一様分布していることを示唆する。
(2) $E_0 \in \mathbf{R}$ を任意にとり

$$\xi'_L(I \times B) := \ \mathrm{Tr}\ \left(1_{LB}(x)P_{E_0+\frac{I}{L^d}}(H)\right)$$

により $\mathbf{R}^{d+1}$ 上のランダム測度を定義する。E_0 が局在領域にあるときは

$$\xi'_L \xrightarrow{d} \zeta_P.$$

ここで、$\xrightarrow{d}$ は分布の意味での収束を意味する。ζ_P は intensity $n(E_0)dE \times dx$ を持つ $\mathbf{R}^{d+1}$ 上のポアソン過程であり、$n(E_0) = \frac{d\nu}{dE}(E_0)$ は H の density of states. ここで、(1), (2) いずれも $l^2(\mathbf{Z}^d)$ 上の作用素 H を用いて定義した。しかし $U = [0,1]^d$ とおくとき、ξ_L, ξ'_L の定義において H を $H_L := H|_{LU}$ で置き換えて得られるもの $\xi_{L,f}, \xi'_{L,f}$ についても同様の結果

[1]我々が考えている symmetric tree $\mathbf{B}$ についても同様の結果が成立することを証明できる。

[2]$\mathbf{R}^n$ 上の locally finite Borel measure 全体の集合 $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$ に vague topology によるボレル集合族 $\mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbf{R}^n))$ を導入するとき、$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ から $(\mathcal{M}(\mathbf{R}^n), \mathcal{B}(\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)))$ への可測写像のことを $\mathbf{R}^n$ 上のランダム測度と呼ぶ。

を得る。即ち $\xi_{L,f} \xrightarrow{v} \nu \times d\mu|_U$, $\xi'_{L,f} \xrightarrow{d} \zeta_P|_{\mathbf{R}\times U}$. この意味で $l^2(\mathbf{Z}^d)$ 上のアンダーソンモデルにおいては finite volume approximation と infinite volume operator は同じ振る舞いをすると考えられる。

本研究ではベーテ格子上のアンダーソンモデルについて [4] と類似を考えたい。そのためにまず $\mathbf{B}$ を次のようにして $\mathbf{R}^2$ 上に実現する[3]。原点に $\mathbf{B}$ の点を置き、各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して原点から距離 n 離れた円周上に $\mathbf{B}$ の点を互いに等距離になるようにして K^n 個置いて、対応する点同士をエッジでつなぐ。次の集合を定義する。

$$\begin{aligned} A(a,b;J) &:= \{x \in \mathbf{B} : \arg x \in J,\ |x| \in (a,b)\}, \quad J \subset \mathbf{T},\ 0 \le a < b \\ A_L(a,b;J) &:= A(a+L, b+L; J) \\ B_L(J) &= A(0,L;J), \quad B_L = B_L(\mathbf{T}). \end{aligned}$$

H の固有値・固有函数の分布を見るために、$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ 上のランダム測度を区間 $I \times A(a,b;J)$ に対しては

$$\xi_L(I \times A(a,b;J)) := \frac{1}{K^L} \mathrm{Tr}\ \left(1_{A_L(a,b;J)}(x) P_I(H)\right)$$

を満たすものとして定義する。次は ergodic theorem から容易に導かれる。

Theorem 1 $\xi_L \xrightarrow{v} \nu \times \mu$, a.s.

ここで、ν は H の density of states measure であり、μ は $\mathbf{R}^2$ 上の測度で

$$\mu(A(a,b;J)) = \frac{|J|}{2\pi}(K^b - K^a) \cdot \frac{K}{K-1}$$

を満たすものとする。$\mathbf{B}$ を Poincaré disk 上に実現した場合、μ は $\mathbf{B}$ 上の不変測度とほぼ一致する。$l^2(\mathbf{Z}^d)$ 上のアンダーソンモデルとは異なり、ξ_L の finite-volume version

$$\xi_{L,f}(I \times A(a,b;J)) := \frac{1}{K^L} \mathrm{Tr}\ \left(1_{A_L}(x) P_I(H|_{B_{L+1}})\right), \quad 0 \le a < b \le 1, \quad J \subset \mathbf{T}$$

は、

$$\xi_{L,f} \xrightarrow{v} \nu_C \otimes \mu|_{B_1}, \quad a.s.$$

を満たすので、一般に ξ_L とは異なる振舞いをする。ここで、ν_C は H_C の density of states measure で次の式により与えられる。

$$\nu_C(I) = \frac{K-1}{K} \sum_{n=0}^{\infty} K^{-n} \mathbf{E}[\langle x_n | P_I(H_C) | x_n \rangle].$$

[3]Poincaré disk 上に実現しても良い。

ここで、x_n は C の境界からの距離が n に等しいような任意の点である。

固有値の局所的な揺らぎに対応する固有関数の分布を見るために、$\mathbf{R}\times\mathbf{T}$ 上のランダム測度を区間 $I\times J$ に対しては

$$\xi'_L(I\times J) := \mathrm{Tr}\ \left(1_{B_L(J)}(x)P_{E_0+\frac{I}{KL}}(H|_{B_L})\right)$$

と定める。$l^2(\mathbf{Z}^d)$ 上のアンダーソンモデルとは異なり H の finite-volume approximation $H|_{B_L}$ を採用し、固有函数の分布については $\mathbf{B}_L$ の「角度方向」の依存性のみを考える。次を仮定する。

(1) ある $\tau>0$ に対して $\mathbf{E}[|V(x)|^\tau]<\infty$.
(2) $\mathbf{E}[\log|\langle 0|(H_{B_L}-E)^{-1}|0\rangle|]$ は $E\in I$ の函数として L について同等連続。

[2] の結果を用いることにより、次を得る。

Theorem 2
$\xi'_L \xrightarrow{d} \zeta_P$, $a.e.E_0$. ここで、ζ_P は intensity $\frac{K}{K-1}n_C(E_0)dE\times\frac{dx}{2\pi}$ を持つ $\mathbf{R}\times\mathbf{T}$ 上のポアソン点過程、n_C は $\mathbf{B}$ に対応する canopy graph の density of States である。

このように、局所揺らぎに関しては $\mathbf{B}$ の「角度方向」でのポアソン性しか証明できない。また、ポアソン過程への収束を証明できるのは fiinte-volume version のみであって infinite volume operator H に対応するランダム測度の挙動については不明である[4]。

それは次のような理由による。[5] で行われている議論からの類推により B_L をいくつかの subtree に分解して、対応するシュレーディンガー作用素のグリーン函数のトレースの差を評価するとき、$\mathbf{Z}^d$ の場合とは違って誤差項が無視できなくなる。それは tree の構造により subtree の境界近傍の体積が subtree の体積の主要項となるためである[5]。ところが、[2] では次のことが示されている。$|x|=N$ となる点 $x\in B_L(J)$ をルートとする $B_L(J)$ の subtree を $\mathcal{T}_L(x)$, $H_x := H|_{\mathcal{T}_L(x)}$, $\{E_j(\mathcal{T}_L(x))\}_j$ を $H_x := H|_{\mathcal{T}_L(x)}$ の固有値とし、$\mathbf{R}$ 上の点過程を

$$\mu_L(dx) := \xi_L(dx\times\mathbf{T}),\quad \mu_{L,x}(dx) := \sum_j \delta_{|\mathcal{T}_L|(E_j(\mathcal{T}_L(x))-E)}(dx)$$

[4]おそらく、それはポアソン過程とは異なるものに収束すると考えられる。

[5]同様の理由により、[6] で行われたように固有函数の局在中心の分布を考えることも出来ていない。

と定めると

$$\mu_L - \sum_{|x|=N} \mu_{L,x} \xrightarrow{d} 0.$$

これは、$N \ll L$ とすれば $H \simeq \oplus_x H_x$ というハミルトニアンの分解による誤差項は小さくできるからである。Theorem 2 はこの式と Minami's estimate [5] により導かれる。

Acknowledgement 本研究は科学研究費基盤C no.18540125 による援助を受けている。

参考文献

[1] Aizenman, M., : Localization at Weak Disorder: Some Elementary Bounds, Rev. Math. Phys. **6**(1994), 1163-1182.

[2] Aizenman, M., Warzel, S., : The canopy graph and level statistics for random operators on trees, preprint.

[3] Klein, A., : Extended states in the Anderson model, Adv. Math. **133**(1998), 163-184.

[4] R. Killip, R., and Nakano, F., : Eigenfunction statistics in the localized Anderson model, Annales Henri Poincaré. **8**, no.1 (2007) p.27-36.

[5] Minami, N., : Local fluctuation of the spectrum of a multidimensional Anderson tight binding model, Commun. Math. Phys. **177**(1996), 709-725.

[6] Nakano, F., : "Distribution of localization centers in some discrete random systems", Rev. Math. Phys. Vol. 19 No.9 (2007) p.941-965.